

TD N°2 : Les suites de fonctions

Exercice 1

On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de ces suites de fonctions sur les intervalles I proposés.

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; $I = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$; $I = [0, 2]$.
3. $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$; $I = \mathbb{R}, [-a, a]$.

Exercice 3

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 5

Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} dx$
4. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^n(x) dx$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$
6. $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$
7. $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$

Exercice 6 Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout réel x ,

$$|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$$

Qu'en déduire quant aux fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geq N$?

2. Conclure que f est une fonction polynomiale.

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que, si (x_n) est une suite de $[a; b]$ qui converge vers $x \in [a; b]$, alors

$$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Exercice 8 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

1. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Si on suppose de plus que f est de classe C^1 sur $[a, b]$, retrouvez ce résultat en effectuant une intégration par parties.

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$f_n(x) = \ln(n) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+x}$$

1. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée.

On rappelle la comparaison $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1; +\infty[$. On pose

$$\Psi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+x} \right)$$

2. Montrer que Ψ est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
3. Simplifier $\Psi(x+1) - \Psi(x)$ pour $x > 0$. En déduire un équivalent de Ψ en 0^+ .
4. Déterminer un équivalent de Ψ en $+\infty$.

Exercice 10

1. Pour tout $n \geq 1$, $P_n : x \mapsto k \int_0^x (1-t^2)^n dt$ où k est un réel choisi tel que $P_n(1) = 1$. Si $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers 1 sur $[\varepsilon, 1]$.
2. Si $n \geq 1$, on note $Q_n : x \mapsto \int_0^x P_n$. Montrer que $(Q_n)_n$ converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

Exercice 11 Théorème de Dini

Soit (f_n) une suite croissante (ie $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose $K_n(\varepsilon) = \{x \in [a, b]; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$.

1. Justifier que si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $K_n(\varepsilon) = \emptyset$, alors (f_n) converge uniformément vers f .
2. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.