

TD N°5 : Les séries de fourier [2]**Exercice 1**

1. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer cette série ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction $f \in D_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Exercice 2

Etudier la série de Fourier de la fonction 2π périodique valant x^2 sur $[-\pi, \pi]$. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout couple (m, n) de $\mathbb{N}^2$, l'application $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$ (on dit qu'il s'agit de fonctions à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées).

1. Montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
2. Pour $f \in \mathcal{S}$, étudier la convergence des séries de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) \text{ et } G(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(x+n).$$

3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.
4. Montrer que F est développable en série de Fourier, et exprimer ses coefficients à l'aide de la fonction $\hat{f} : y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ty} dt$.
5. En déduire la formule sommatoire :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(p)$$

Exercice 4 Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite (indexée par $\mathbb{Z}$) à termes dans $\mathbb{C}$.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $S_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \sum_{k=-p}^p \gamma_k e^{ikt}$. On suppose que la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application notée f . Démontrer que f est 2π -périodique, continue, et que : $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \gamma_n$.

Exercice 5 Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, 2\pi$ -périodiques, de classe C^∞ , telles qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq M$.