

TD N°4 : Les séries de fourier [1]

Exercice 1 On considère la suite de fonctions (Q_n) donnée par

$$Q_n(x) = c_n \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^n$$

où c_n est une constante choisie de sorte que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) dx = 1$.

À chaque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on associe les fonctions P_n définies par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) Q_n(s) ds$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme trigonométrique.
2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_{\infty} = 0$.

Exercice 2

1. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.
2. Dédurre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

1. On considère

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$$

une subdivision adaptée à f sur le segment $[0, 2\pi]$ et g un élément de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \forall x \in]a_k; a_{k+1}[, \quad f'(x) = g(x).$$

Montrer que pour tout entier n non nul,

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(g).$$

2. Dédurre que les séries $\sum_{n \geq 0} c_n(f)$ et $\sum_{n \geq 0} c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes.

Exercice 4 Soit p un entier strictement positif et soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Montrer que :

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$$

2. Dédire que : $c_n(f) = o(\frac{1}{n^p})$