CPI2-UM6P | Analyse 3 | Prof : Taha EL BAKKALI EL KADI

TD N°1 : Les espaces vectoriels normés

Exercice 1

1. Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :

$$\|A\|_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|,\qquad \|A\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|^2},\qquad \|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n,\,1\le j\le p}|a_{i,j}|.$$

   Justifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_{n+1})$ une $(n+1)$-liste de scalaires deux à deux distincts. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$ en posant : $\|P\|=\max\big(|P(a_1)|,\dots,|P(a_{n+1})|\big)$.
3. Montrer que l'application $N:\mathbb{K}[X]\longrightarrow\mathbb{R}_+,\quad P\longmapsto \sup_{t\in[0,1]}\big|P(t)-P'(t)\big|$ est une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Supposons que l'on dispose d'une norme $\|\cdot\|$ sur E, ainsi que d'un endomorphisme u de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'application

$$N:E\longrightarrow\mathbb{R}_+,\quad x\longmapsto\|u(x)\|$$

   soit une norme sur E.
5. Soit $E=B(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'espace des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'application suivante est une norme sur E :

$$N:E\longrightarrow\mathbb{R}_+,\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_n|}{2^n}\right).$$

Exercice 2

Soit a et b deux réels vérifiant $a<b$, et $p\ge 1$. On considère l'application :

$$\mathcal{N}_p:C([a,b],\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{R}_+,\qquad f\longmapsto\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}.$$

1. Montrer que pour tout $p\ge1$, $\mathcal{N}_p$ est une norme sur $C([a,b],\mathbb{K})$.
   Indication : pour l'inégalité triangulaire, on pourra utiliser la convexité de la fonction $x\mapsto x^p$.
2. Pour $f\in C([a,b],\mathbb{K})$, montrer que

$$\mathcal{N}_p(f)\xrightarrow[p\to+\infty]{}\mathcal{N}_\infty(f).$$

3. Le résultat de la première question subsiste-t-il si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Exercice 3

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad N(x_1, x_2) = \sup_{t\in[0,1]} |x_1 + tx_2|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la boule unité fermée pour cette norme.

Exercice 4

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 5

Dans la suite $E = C([0,1], \mathbb{K})$. Pour $f \in E$, on notera :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}.$$

Montrer que :

1. $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
2. $\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
3. $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$ mais ne sont pas équivalentes.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite périodique égal à son ensemble image.
2. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(sin(n))_{n\geq 1}$ est $[-1, 1]$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_p = \{u_n \mid n \geq p\}.$$

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$.
2. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé.

Exercice 8

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \qquad \|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit *unitaire* si son coefficient dominant vaut 1.

1. Montrer que l'ensemble U des polynômes unitaires est fermé.
2. (a) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré $r \in \mathbb{N}$, alors on a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^r.$$
   (b) Montrer que l'ensemble S des polynômes unitaires et scindés dans $\mathbb{R}[X]$ est un fermé.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.