CPI2-UM6P	Analyse 3	Prof : Taha EL BAKKALI EL KADI

DS N°1

Généralités [9pts]

1. (2pt) Donner un exemple d'application continue entre deux espaces vectoriels normés E et F dont l'image d'un ouvert de E n'est pas un ouvert de F. De même, donner un exemple d'application continue entre deux espaces vectoriels normés dont l'image d'un fermé de E n'est pas un fermé de F.
2. (1pt) Soit E un evn et A, B, C des parties non vides de E. Montrer que
$$X = \{x \in E \mid \inf_{y\in A} ||x-y|| + \inf_{y\in B} ||x-y|| = \inf_{y\in C} ||x-y||\}$$
est un fermé de E.
3. (1pt) Montrer que dans un evn, on a : $\overline{B(0,1)} = B_f(0,1)$.
4. (a) (1pt) Soit $l \in]0,2\pi]$. En admettant que $\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $]l-\epsilon, l+\epsilon[\cap \mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z}$ est infini.
   (b) (1.5pt) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n + 2\pi b_n$ converge vers l et $\{a_n + 2\pi b_n \mid n \geq 0\}$ est infini.
   (c) (1pt) Justifier que $\{a_n \mid n \geq 0\}$ est infini.
   (d) (0.5pt) Déduire que pour tout $y \in [-1,1]$, il existe $(y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $sin(y_n)$ converge vers y et $\{y_n \mid n \geq 0\}$ est infini.
   (e) (1pt) Déduire que tout élément de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(sin(n))_{n\geq 0}$.

Exercice 1 [6pts]

Soit $n \geq 1$. Notons $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynomes de $\mathbb{R}[X]$ degré n et Ω l'espace des polynomes de $\mathcal{P}_n$ qui sont scindés à racines simples dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P_0 \in \Omega$ et notons $(x_1, \ldots, x_n)$ la famille croissante des racines de P_0 et choisissons $y_1, \ldots, y_{n+1}$ tels que : $y_1 < x_1 < \ldots, < x_n < y_{n+1}$.

1. (1pt) Pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on définit l'application
$$\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, \quad P \longmapsto P(y_k)P_0(y_k).$$
Montrer que pout tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, φ_k est continue.
2. (1pt) Prouver que $V = \bigcap_{k=1}^{n+1} \varphi_k^{-1}(]0,+\infty[)$ est un voisinage **ouvert** de P_0.
3. (1pt) Justifier que si on arrive à prouver que $V \subset \Omega$, alors on peut déduire que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (1.5pt) Soit $P \in V$. Montrer que P et P_0 ont meme signe sur les y_k. Déduire que P altèrne du signe entre y_k et y_{k+1} pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
5. (1pt) Montrer que P admet au moins n racines réels.
6. (0.5pt) Déduire que $P \in \Omega$.

Exercice 2 [7pts]

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ on désigne sa classe de similitude par :
$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M) = \left\{ PMP^{-1} \in M_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \right\}.$$

(a) (1pt) Supposons par absurde que $Int(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M)) \neq \emptyset$, donc :

$$\exists A \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M), \exists \epsilon > 0,\ B(A,\epsilon) \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(M).$$

Montrer qu'on peut trouver une matrice dans $B(A,\epsilon)$ qui est proche de A à ϵ près, mais avec une trace différente de la trace de A.

(b) (1pt) Conclure.

2. (a) (1pt / Bonus) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable. Montrer que $B \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à A si, et seulement si,

$$\chi_A = \chi_B \quad \text{et} \quad \pi_A(B) = O_n.$$

(b) (1pt) Supposons que M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. On définit $\varphi_M : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X] \times M_n(\mathbb{C})$ par $\varphi_M(N) = (\chi_N, \pi_M(N))$. Montrer que cette application est continue.

(c) (1pt) En déduire que la classe de similitude d'une matrice diagonalisable est une partie fermée de $M_n(\mathbb{C})$.

(d) (1pt) Inversement, on suppose que la classe de similitude d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée. Montrer que cette classe de similitude contient au moins une matrice triangulaire supérieure T.

(e) (1pt) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice diagonale $D_k = \operatorname{diag}(k, k^2, \ldots, k^n)$. Calculer $D_k T D_k^{-1}$.

(f) (1pt) Établir que M est diagonalisable.

Exercice 3 [5pts]

1. (2pt) Soit A partie d'un espace vectoriel normé E et $x \in \overline{A}$. Montrer que l'on est dans un seul des deux cas suivants :

   (i) il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$; (On dit dans ce cas que x est point isolé de A.)

   (ii) pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ est infini ; (On dit dans ce cas que x est point d'accumulation de A.)

   Indication : Montrer que si (i) est fausse, alors (ii) est vraie (Penser à construire une suite (x_n) de A qui converge vers x avec $x_n \neq x$ pour tout $n \geq 1$.)

2. (1pt) Montrer que x est un point d'accumulation de A ssi il existe une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x et $\forall n \geq 1, x_n \neq x$.

3. Soit $A = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$.

   (a) (1pt) Déterminer l'ensemble des points isolés de A. (à justifier).

   (b) (1pt) Déterminer l'ensemble des points d'accumulation A' de A et déduire l'adhérence $\overline{A}$ (à justifier).

Exercice 4 [Bonus] [6pts]

On fixe un entier $d \geq 1$. On note *pavé (ou rectangle) ouvert rationnel* tout produit

$$Q = \prod_{i=1}^{d}]q_i, r_i[\qquad \text{où } q_i, r_i \in \mathbb{Q} \text{ et } q_i < r_i.$$

On désigne par $\mathcal{R}_d$ la famille de tous les pavés ouverts rationnels de $\mathbb{R}^d$.

1. (2pt) Montrer que $\mathcal{R}_d$ est une famille dénombrable.

2. (2pt) Soit V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in V$. Montrer qu'il existe un pavé ouvert rationnel Q_x tel que $x \in Q_x \subset V$.

3. (2pt) Notons $\mathcal{R}_V := \{Q \in \mathcal{R}_d : \ Q \subset V\}$. Montrer que $V = \bigcup_{Q \in \mathcal{R}_V} Q$ et que $\mathcal{R}_V$ est dénombrable.