CPI2-UM6P Analyse 3 Prof : Taha EL BAKKALI EL KADI

DL N°1

Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

1. Montrer que $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.
2. En déduire qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$. (Autrement dit, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum sur $\mathbb{C}$. Le point z_0 est donc un candidat naturel pour être une racine de P.)
3. Justifier qu'il existe des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que $b_n = 1$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z + z_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$.
4. Supposons que z_0 ne soit pas une racine de P et posons
$$Q(z) = \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)}.$$
Soit k le plus petit entier de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $b_k \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\lim_{z \to 0} \varepsilon(z) = 0$, et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$Q(z) = 1 + \frac{b_k}{b_0} z^k \big(1 + \varepsilon(z)\big).$$
5. En posant $\frac{b_k}{b_0} = |\tilde{b}_k| e^{i\beta}$, montrer qu'en choisissant convenablement l'argument $\theta \in \mathbb{R}$, on peut prendre $z = re^{i\theta}$ de sorte que $|Q(z)| \leq \big|1 - |\tilde{b}_k| r^k\big| + |\tilde{b}_k| r^k |\varepsilon(z)|$.
6. En déduire une contradiction avec la minimalité de $|P(z_0)|$ et conclure que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

1. Soit E un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que $u_n \to \ell \in E$ et on note
$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$
Montrer que A est BL compact.
2. Soit E et F deux evn et $f : E \to F$ une application continue telle que, pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ soit compact. On veut montrer que f est une application fermée, c'est-à-dire que l'image de tout fermé par f est un fermé.
   (a) Soit A un fermé de E et $(y_n = f(x_n))_{n \geq 0} \in f(A)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in F$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 0}$ est à valeurs dans un compact.
   (b) Conclure.
3. **Application.** Soit $n \geq 1$ et notons F_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont toutes les racines sont réelles. Montrer que F_n est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3

1. Soit E un espace vectoriel normé et $f : K \to K$ une application continue sur un compact K vérifiant :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \quad ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||.$$
   (a) Montrer que $\inf_{x \in K} ||x - f(x)|| = 0$ et déduire que f admet un point fixe x^*, puis établir son unicité.
   (b) Soit x_0 un point quelconque de X. On définit la suite (x_n) par récurrence grâce à la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers l'unique point fixe x^*.
   (c) Donner un exemple d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|,$$
   qui n'admet pas un point fixe.