

Séries de fonctions

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



Modes de convergence d'une série de fonctions

Modes de convergence d'une série de fonctions

Dans ce chapitre, $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E , et F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I un intervalle réel non réduit à un point et les fonctions considérées are defined on I à valeurs réelles or complexes.

Définition 1

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge :

- ① simplement sur A si, pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente ;
- ② uniformément sur A , si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est uniformément convergente sur A ;
- ③ normalement sur A , si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Remarque 2: $CVN \implies CVU \implies CVS$ et $\left\{ \begin{array}{l} CVS \implies CVU \\ CVS \implies CVN \\ CVU \implies CVN \end{array} \right.$

Modes de convergence d'une série de fonctions

Remarque 3: Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement [resp. uniformément] sur A , la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (S_n - S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors simplement [resp. uniformément] vers la fonction nulle sur A .

Exercice 4: Montrer que la série de fonctions $\sum e^{-nx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^{+,*}$ mais pas uniformément convergente.

Proposition 5

On a équivalence entre :

- ① la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A .
- ② $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \xrightarrow[A]{CVU} \tilde{0}$.

Modes de convergence d'une série de fonctions

Exercice 6: Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$

Proposition 7

La série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur A si, et seulement si, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ est convergente et $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 8: $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nt)}{n^2+1}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9: Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$ sur $[0, +\infty[$.

Abel uniforme

Théorème 10

Soit $\sum f_n$ une série d'applications de A dans F de la forme:

$$f_n = g_n h_n$$

où les g_n sont des applications de A dans $\mathbb{R}$ et h_n des applications de A dans F . Si

- ❶ pour chaque $x \in A$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante,
- ❷ la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers 0 sur A ,
- ❸ il existe $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in A} \|\sum_{k=0}^n h_k(x)\| \leq M$
(la suite des sommes partielles de $\sum h_n$ est uniformément bornée).

alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A .

Proposition 11

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

- 1 Si la série $\sum \alpha_n$ est convergente, la série $\sum \alpha_n e^{inx}$ est alors normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
- 2 Si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \alpha_n e^{inx}$ est alors simplement convergente sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[a, b] \subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Série de fonction et limite

Théorème 12

Soit $a \in \bar{A}$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie :

- ① chaque fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a ,
- ② $\sum f_n$ converge uniformément sur A

alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

Exercice 13: Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ ne converge pas uniformément sur $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

Exercice 14:

- ① Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite de S en $+\infty$.
- ② Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Théorème 15

Si la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie :

- ① chaque fonction f_n est continue sur A ,
- ② $\sum f_n$ converge uniformément sur A

alors la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur A .

NB : la 2ème condition peut être remplacée par : $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de A .

Exercice 16: Montrer que de la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n+1)!}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17: Montrer que de la fonction $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ est définie et continue sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

Exercice 18: Montrer que de la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Série de fonction et intégrale

Théorème 19

Si la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie :

- ① chaque fonction f_n est continue sur $[a, b]$
- ② $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

alors la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur $[a, b]$ et,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Exercice 20: Calculer

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) dx$$

Théorème 21 : Théorème d'intégration terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. Si

- 1 les fonctions f_n sont intégrables sur I .
- 2 la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux.
- 3 la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Exercice 22: Montrer que : $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Série de fonction et dérivation

Théorème 23

Si la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie:

- ① chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- ② la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ,
- ③ la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

alors la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t)$ pour tout $t \in I$

Exercice 24: Tracer le tableau de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

Théorème 25

Si la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie:

- 1 les f_n sont de classe C^p sur I .
- 2 les séries $\sum f_n, \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I .
- 3 la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I

alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p et, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

Exercice 26: Tracer le tableau de variation sur $]0, +\infty[$ de la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

Exponentielle réelle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Proposition 27

e est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$, solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$. Cette fonction est appelée l'exponentielle réelle.

La fonction Zeta

La fonction Zeta

Pour $s \in]1, +\infty[$, posons

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

- 1 Montrer que ζ est définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
- 2 Etudier la monotonie et la convexité de ζ .
- 3 Tracer le tableau de variation de ζ .