

Suites de fonctions

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



Convergence simple

Convergence simple

Dans ce chapitre, nous considérons E comme un espace vectoriel normé, A comme une partie non vide de E , et F comme un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

La suite (f_n) converge simplement sur A vers f , si pour tout élément x de A , la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est limite simple sur A de la suite de fonctions (f_n) .

Exemple 2:

La suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ f(1) = 1. \end{cases}$$

On remarque que toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors que f n'est pas continue.

Convergence simple

Exercice 3: Trouver la limite simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, donnée par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1}$$

Exercice 4: Trouver la limite simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

On remarquera que les f_n sont bornées et continues alors que f ne l'est pas.

Remarque 5: Une fois la partie A fixée, on pourrait affirmer que la suite (f_n) converge vers f , mais il est essentiel de préciser que cette convergence se fait sur A afin d'éviter toute ambiguïté, notamment lorsque des restrictions seront considérées à plusieurs reprises.

Convergence uniforme

Définition 6

La suite (f_n) converge uniformément sur A vers f si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

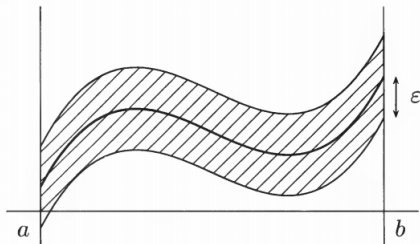
On dit alors que f est limite uniforme sur A de la suite de fonctions (f_n) .

Remarque 7:

- 1 La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f est caractérisée par la convergence de la suite (μ_n) vers 0, où $\mu_n = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \in \mathbb{R}$.
- 2 Pour montrer que la suite ne converge pas uniformément vers f sur A , il suffit de trouver une suite de points (x_n) de A telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

Convergence uniforme

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, on peut associer à chaque fonction f_n le tracé de son graphe dans le plan xOy . La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel, le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan xOy définie par $x \in A$ et $y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$.



Proposition 8

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f , alors elle converge simplement vers f .

Remarque 9: La suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$

Exercice 10: Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

- 1 $f_n(x) = \frac{x+n}{n(1+x^2)}$
- 2 $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ avec $\alpha \geq 0$.

Exercice 11: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$

- 1 Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- 2 Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puis sur $]0, +\infty[$.

Suites de fonctions et continuité

Proposition 12

Soit a un point de A . Si :

- ① pour tout n , f_n est continue en a ,
- ② la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A ,

alors f est continue en a .

Corollaire 13

Si :

- ① pour tout n , la fonction f_n est continue sur A ,
- ② la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A ,

alors f est continue sur A .

Proposition 14

Si :

- ① pour tout n , la fonction f_n est continue sur A ,
- ② la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de A vers f ,

alors f est continue sur A .

Remarque 15:

- ① Si une suite de fonctions converge uniformément sur l'ensemble A , alors elle converge également uniformément sur tout compact de A . Cependant, la réciproque n'est pas vraie, comme l'illustre la suite définie par $f_n(x) = x^n$ sur $A = [0, 1]$.
- ② Si A est une partie de $\mathbb{R}$, une suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de A si, et seulement si, elle converge uniformément sur tout segment inclus dans A .

Suites de fonctions et dérivabilité

Proposition 16

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- 1 f_n converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.
- 2 f'_n converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g .

Alors f est de classe C^1 , $f' = g$.

Remarque 17: Si f_n converge uniformément vers f et si f'_n converge simplement vers une fonction g , cela ne garantit pas que f soit dérivable. Par exemple, la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.

Proposition 18

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^k de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- ❶ pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $f_n^{(j)}$ converge simplement vers une fonction $g_j : I \rightarrow \mathbb{K}$,
- ❷ $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors g_0 est de classe C^k et on a $g_0^{(j)} = g_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Suite de fonctions et limite.

Proposition 19

Soit a un point adhérent à A . Si :

- ① pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a ,
- ② la suite (f_n) converge uniformément sur A vers f ,

alors la suite (ℓ_n) admet une limite $\ell \in F$ et la fonction f admet ℓ comme limite en a .

Considérons $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$; f_n converge simplement vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

Suite de fonctions et intégration.

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point. Soit $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur I vers une fonction (continue) $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

- Il est possible que les fonctions f_n soient intégrables sur I , alors que f ne le soit pas.
- Il est également possible que les f_n soient intégrables sur I et que f le soit aussi, mais que la suite $(\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\int_I f$.

Il est donc nécessaire de renforcer les hypothèses afin de garantir que f soit intégrable sur I et que $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$ lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 20

Soit $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Supposons que :

- $\int_I f$ existe et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I f_n$ existe.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f ,
- I est un intervalle borné.

Alors :

- $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f$.

Remarque 21: La suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-t/n}$ satisfait $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc, $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, +\infty[$. Cependant, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$ ne tend pas vers 0.

Exercice 22:

- ❶ Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
- ❷ Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
- ❸ Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$$

Théorème 23 (Convergence dominée)

Soit $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

- ① pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ,
- ② $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f ,
- ③ f est continue par morceaux sur I ,
- ④ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, ≥ 0 , et intégrable sur I ,
- ⑤ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination).

Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ,
- f est intégrable sur I ,
- $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I f$.

Exercice 24:

- ① Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- ② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 25: Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

- ① Justifier que I_n est bien définie.
- ②
 - ① Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - ② Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- ③ La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente?

Approximation des fonctions

Toute fct continue sur $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fcts en escalier et d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.

Approximation des fonctions

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, et considérons $\xi([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Il est alors équivalent de dire : $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \xi([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, et de dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists e \in \xi([a, b], \mathbb{R}) \text{ tel que } \|f - e\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Théorème 26

Toute fonction f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Théorème 27

Toute fonction de $C([a, b], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions affines par morceaux et continues.

$x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite
de fcts polynomiales sur $[-1, 1]$

Approximation des fonctions

Considérons la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $P_0(x) = 0$ et $\forall n \geq 1, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} (x^2 - (P_n(x))^2)$

Remarque 28: Pour tout $n \geq 1$, P_n est une fonction polynomiale de degré 2^n .

Lemme 29

On a :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [-1, 1], 0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \leq 1$$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers $x \mapsto |x|$.

Théorème 30

On a : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [-1, 1], 0 \leq |x| - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $x \mapsto |x|$.

Toute fonction de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Lemme 31

Soit $\alpha \in [a, b]$. Considérons la fonction f_α définie sur $[a, b]$, par :

$$f_\alpha(x) = |x - \alpha|.$$

f_α est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$

Lemme 32

Soit $a < b$ deux réels et E l'espace des fonctions continues et affines par morceaux de $[a; b]$ vers $\mathbb{R}$. $(f_\alpha)_{\alpha \in [a; b]}$ est une base de E .

Théorème 33

Toute fonction continue et affine par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fcts polynomiales sur cet intervalle.

Corollaire 34 (Théorème de Weierstrass)

Toute fonction de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Le résultat est faux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. En effet, une limite uniforme de fonctions bornées étant bornée, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est pas bornée sur $I =]0, 1]$ ne peut être limite uniforme de fonctions polynomiales qui seraient nécessairement bornées sur I .

Exercice 35:

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $c \in [a, b]$. Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et $P_n(c) = f(c)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36: Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Montrer que, si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$, alors $f = 0$.