

Séries numériques

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



Généralités

Dans tout ce cours, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle somme partielle d'ordre n de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le nombre $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la série de terme général u_n et notée $\sum_{n \geq 0} u_n$ (ou $\sum u_n$.)
- On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ est convergente. Elle est divergente dans le cas contraire.
- Si $\sum u_n$ est convergente, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.

On notera $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série indexée seulement à partir de n_0 . Ses sommes partielles sont alors $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ pour tout $n \geq n_0$.

Définition 2

Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S . Pour tout n , la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$ est convergente ; sa somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est par définition le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ et l'on a :

$$R_n = S - S_n$$

Exercice 3: Montrer que :

- ❶ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- ❷ $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.
- ❸ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
- ❹ $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$

Proposition 4

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La réciproque est fausse.

Exemple 5:

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exercice 6: Montrer que :

- 1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.
- 2 $\sum (-1)^n$ diverge.
- 3 $\sum \cos(n)$ diverge.
- 4 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{d_n^2}$ diverge. (d_n le nombre de diviseurs positifs de n)

Théorème 7

Si la série $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.

Remarque 8:

- 1 Si la série $\sum |u_n|$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- 2 Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente.

Exemple 9:

- 1 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.
- 2 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais elle ne converge pas absolument.

Séries à termes positifs

Proposition 10

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- la série $\sum u_n$ converge;
- la suite (S_n) est majorée

De plus, dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_n S_n$.

Proposition 11

On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ; si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Séries à termes positifs

Exemple 12:

- ① $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.
- ② $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Proposition 13

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

- ① Si $v_n = O(u_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge ;
- ② si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 14:

- $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ diverge et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Séries à termes positifs

Proposition 15 (Séries de Riemann)

Soit α un nombre réel. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 16: Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 17: Etudier la convergence de ces séries :

- $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n^3+1}$; $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2+1}$; $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}}$.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+n}$; $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$; $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^2+1}$.
- $\sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$; $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Exercice 18: Montrer que : $\sum \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$ converge et déduire que : $\sum \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ converge.

Théorème 19

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors :

- ① Si $\sum u_n$ converge, alors : $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.
- ② Si $\sum u_n$ diverge, alors : $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Exercice 20:

- ① Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$
- ② Dédire que $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 21: On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$.
En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n}$

Comparaison série-intégrale

Comparaison série-intégrale

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux.

- ① Si f est **décroissante**, alors pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$$

- ② Si f est **croissante**, alors pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt$$

Théorème 22

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante sur $[1, +\infty[$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(t) dt.$$

Alors,

- ❶ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- ❷ La série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.
- ❸ Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge, on a $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^n f(t) dt$.
- ❹ Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et si la convergence de la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est lente, alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 23:

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\sum \frac{1}{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}$ converge.

Exercice 24: Soit α un nombre réel. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Montrer que :

❶ Si $\alpha \in (0, 1)$,

$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

❷ Si $\alpha = 1$,

$$S_n \sim \ln n.$$

❸ Si $\alpha > 1$,

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Règle de d'Alembert

Théorème 25 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda, \quad \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors

- si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge ;
- si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge;

Exercice 26: Montrer que :

- $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge.
- Pour tout réel a , $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=1}^n (a+k)$ converge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{C_n^{2n}}$ converge.

Règle de Raabe-Duhamel

Règle de Raabe-Duhamel

Proposition 27 (Compraison logarithmique)

En considérons deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, si on suppose que :

- $\forall n \geq n_0, u_n > 0$ et $v_n > 0$.
- $\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors : $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Théorème 28 (1ère règle de Raabe-Duhamel)

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, avec $\beta > 1$, alors la suite $(n^\alpha u_n)$ admet une limite finie non nulle, et :

- 1 si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge ;
- 2 si $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème 29 (2ème règle de Raabe-Duhamel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\lambda \neq 1$.

- ❶ Si $\lambda > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- ❷ Si $\lambda < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

En considérant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^2}$ on ne peut remarquer qu'on ne pas conclure sur la nature de $\sum u_n$ lorsque $\lambda = 1$.

Exercice 30: Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a et b sont deux nombres réels positifs fixés. Donner la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de a et b .

Règle de Cauchy

Théorème 31 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes > 0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda, \quad \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors :

- si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.
- si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge;

Exercice 32: Montrer que :

- $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ converge.
- $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ converge.

Séries alternées

Séries alternées

Définition 33

La série $\sum u_n$ de réels est alternée lorsque la suite de terme général $(-1)^n u_n$ garde un signe constant.

Théorème 34 (CSSA)

Soit $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$ une série alternée telle que la suite (v_n) soit positive, décroissante et tende vers 0. Alors $\sum u_n$ converge, et sa somme S vérifie $\forall n, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. De plus,

$$|R_n| = |S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_{n+1}$$

Exemple 35 :

- Pour $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge et pour tout entier n , $\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Une série alternée ne converge pas nécessairement, même si son terme général tend vers 0 . La décroissance de la valeur absolue de son terme général est essentielle.

Exemple 36:

Par exemple, la série de terme général u_n défini par :

$$u_{2n} = \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -\frac{1}{n+1}$$

est divergente, puisque ses sommes partielles S_n sont telles que :

$$S_{2n} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\infty$.

Transformation et critère d'Abel

Transformation d'Abel

La transformation d'Abel pour les séries est analogue à l'intégration par parties pour les intégrales.

Considérons une série $\sum_n a_n b_n$. Définissons $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Effectuer une transformation d'Abel sur la série $\sum a_n b_n$ revient à écrire, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Théorème 37 (Critère d'Abel)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle.
- La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit telle que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.

Alors $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 38: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que pour tout $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, $\sum a_n e^{in\theta}$ converge.

Exercice 39: Donner, suivant la valeur du réel α , la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\alpha}{n}.$$

Exercice 40: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Montrer que la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Produit de Cauchy

Produit de Cauchy

Théorème 41 (Produit de Cauchy)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergentes. On note $c_m = \sum_{p+q=m} a_p b_q = \sum_{p=0}^m a_p b_{m-p}$. Alors $\sum c_m$ converge absolument, et :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} c_m = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right).$$

Définition 42

Si z est un nombre complexe, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et la somme de cette série est par définition $\exp(z)$.

Exercice 43: Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{C}, e^{a+b} = e^a e^b$

Sommation par tranches

Théorème 44

Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs. On pose $y_0 = \sum_{i=0}^{p_0} u_i$, et pour tout $n \geq 1$, $y_n = \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} u_i$. Pour tout $m > p_0$, notons $N(m)$ le plus grand entier n tel que $p_n < m$. Alors :

$$S_m = \sum_{i=0}^m u_i = \sum_{n=0}^{N(m)} y_n + \sum_{p_{N(m)} < i \leq m} u_i,$$

et la série $\sum u_m$ converge si, et seulement si, la série $\sum y_n$ converge et $\rho_m = \sum_{p_{N(m)} < i \leq m} u_i$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m$.

Remarque 45: Il ne suffit pas que $\sum y_n$ converge pour que $\sum u_m$ converge. Il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$ et $p_n = 2n$. Alors $y_n = 0$ pour tout n , et $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = 0$ tandis que la série $\sum u_n$ ne converge pas puisque son terme général ne tend même pas vers 0.

Sommation par tranches

Remarque 46: Croire que la convergence de $\sum y_n$ entraîne celle de $\sum u_m$ reviendrait à croire que la convergence d'une seule suite extraite entraîne la convergence de la suite.

Théorème 47

On suppose que la série $\sum y_n$ converge, de somme L . Avec les notations de la proposition précédente, pour que ρ_m tende vers 0 (et donc que $\sum u_m$ converge vers L), il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

- la suite (u_m) est de signe constant ;
- le signe de u_m ne change pas dans chaque tranche;
- la suite (u_m) tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, et la taille $p_n - p_{n-1}$ des tranches est bornée (indépendamment de n).

Exercice 48:

Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n}$

Exercice 49:

Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n}$

Exercice 50:(Principe de condensation de Cauchy)

- ❶ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. On pose $v_n = p^n u_{p^n}$. Montrer que :

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_n$ converge.

- ❷ Application : Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{1}{n \ln(n)} \text{ et } \sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$$

Permutation des termes

Théorème 51 (Permutation des termes)

Si $\forall n, u_n \geq 0$, et si $\sum u_n$ converge, alors pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ (bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même), $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers la même somme.

Remarque 52:

Lorsque le terme général d'une série ne garde pas de signe constant au-delà d'un certain indice, il se peut que $\sum u_n$ converge, mais que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge, ce qui montre bien que la notion de convergence d'une série quelconque est profondément liée à l'ordre de sommation.

Théorème 53 (Permutation des termes)

Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente et soit S sa somme. Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection de l'ensemble des indices. Alors la série $\sum u_{\sigma(k)}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = S.$$

Exemple 54:

Considérons la série $\sum u_n$ dont les premiers termes sont :

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Nous définissons une nouvelle série $\sum v_n$ par une règle de permutation des termes de u_n , donnant les termes consécutifs suivants :

$$1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{3}, \dots, \\ \frac{1}{2^{p-1}+1}, \frac{1}{2^{p-1}+2}, \frac{1}{2^{p-1}+3}, \dots, \frac{1}{2^p}, -\frac{1}{p}, \dots$$

On remarque que la première série converge tandis que la seconde diverge, car elle ne satisfait pas le critère de Cauchy des séries. En effet :

$$\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \frac{1}{2^{p-1}+3} + \dots + \frac{1}{2^p} \geq \frac{1}{2}.$$