Calcul différentiel

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P

Continuité des applications partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note f_x et f_y les applications partielles :

$$f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t) \qquad \text{et} \qquad f_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t,y).$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si f est continue en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors ses applications partielles f_x et f_y sont continues respectivement en y et en x.

   L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

2. Vérifier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les applications partielles f_x et f_y sont continues.
3. Montrer que, pourtant, l'application f n'est pas continue.

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

Dans tout le cours, on suppose que E et F sont des $\mathbb{R}$-ev de dim finie.

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \subset E \to F$ une application. Soit $a \in U$ et $v \in E$. Si la fonction à variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, on dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v*. On note alors

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

Exemple 2: Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = x^2 + 2y,$$

alors: $D_{(1,2)} f(0,0) = 4$.

Exercice 3: Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ r\sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier que: $D_{(1,1)}f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4: Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad M \longmapsto M^2$. Déterminer $D_H f(A)$ pour tous $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 5

Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, et f une fonction de U ouvert de E dans F. Pour $a \in U$ et $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième dérivée partielle de f en a dans la base $\mathcal{B}$, notée :

$$\partial_j f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),$$

est, lorsqu'elle existe, la dérivée de f en a selon le vecteur v_j.

Remarque: Sauf mention contraire, lorsque l'on parle de dérivées partielles pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il est sous-entendu que c'est par rapport à la base canonique.

Exercice 6:

1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f est discontinue en $(0,0)$.

2. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que g admet des dérivées suivant tout vecteur mais que g est discontinue en $(0,0)$.

Différentiabilité

Définition et Proposition 7

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ evn de dim finies, U un ouvert de E et $a \in U$. Une application $f : U \to F$ est dite *différentiable en a* s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que:

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \quad \text{lorsque } h \to 0.$$

Si φ existe, φ est unique et s'appelle la *différentielle* de f en a. On la note $df(a)$.

1. Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est *différentiable sur U* et l'application

$$df : U \to \mathcal{L}(E, F), \quad a \mapsto df(a),$$

   est appelée *application différentielle* de f.
2. Si df est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Si f est linéaire, $df(a) = f$ pour tout $a \in E$.

Exemple 8: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to F$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On a :

1. f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a.
2. Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = df(a)(1).$$

Exemple 9:

1. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace euclidien et $N : E \to \mathbb{R}_+$ est définie par $N(x) = \|x\|^2$. Alors :
$$\forall a \in E, \forall h \in E, \quad dN(a).h = 2\langle h, a\rangle.$$
2. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. On a :
$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), \quad df(A).H = AH + HA.$$
3. Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$. On a:
$$\forall a \in \mathbb{C}^\star, \forall h \in \mathbb{C}, \quad df(a).h = -\frac{h}{a^2}.$$

Proposition 10

Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Remarque: On rappelle que si f une fonction déf sur E de dim finie, admet des dérivées partielles en $a \in E$, alors ceci n'implique pas forcément que f est continue en a.

Proposition 11

Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$, et on a :

$$D_v f(a) = df(a).v\,.$$

Proposition 12

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dim finies, U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si f est différentiable sur U, alors les dérivées partielles de f existent sur U, et pour tout $a \in U$ on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a).e_i.$$

Remarque: Dans ce cas: Si f est différentiable en a.

1. On a:

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad \text{où } h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i.$$

2. Le développement limité de f en a s'écrit:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|).$$

Matrice jacobienne

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dim finie, U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{L} = (v_1, \ldots, v_m)$ une base de F. On note f_i les composantes de f dans cette base.

Proposition 13

f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si toutes ses fonctions composantes sont différentiables en a. Dans ce cas, on a :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{m} df_i(a)\, v_i.$$

Matrice jacobienne

Définition 14

Si f est differentiable en a, alors la matrice jacobienne de f en a est $Jf(a)$, définie par:

$$Jf(a) = \operatorname{mat}(df(a))_{\mathcal{B},\mathcal{L}}.$$

Proposition 15

Si f est differentiable en a, alors:

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Remarque: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, alors la matrice jacobienne est, par convention, définie relativement aux bases canoniques.

Exercice 16: Considérons les applications suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (x + y^2 + z,\ xy^2z,\ x^2z + xy),$

2) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta).$

On admet pour le moment que f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer $Jf(x,y)$ et $Jg(r,\theta)$.

Fonctions continûment differentiables

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E.

Définition 17

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si df est définie et continue sur U.

Proposition 18

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-evn de dim finies et $f : U \subset E \to F$ une fonction. Les assertions ci-dessous sont équivalentes.

(i) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

(ii) Toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.

Dans les deux cas, pour tout $a \in U$ et pour tout $h \in E$, on a:

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{si } h = (h_1, \ldots, h_n)_{\mathcal{B}}.$$

Exercice 19: On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Pour tout $(x,y) \in U$, calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$
2. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Définition 20

Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une dérivée partielle d'ordre p par la relation

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right).$$

une fonction $f : U \subset E \to F$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U.

Opérations sur des fonctions differentiables

Proposition 21

Soient f et g deux fonctions de U dans F ainsi que λ et μ deux réels.

- Si f et g sont différentiables en a, alors l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda\, df(a) + \mu\, dg(a).$$

- Si f et g sont différentiables (respectivement de classe C^1), alors l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable (respectivement de classe C^1) et :

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df + \mu\, dg.$$

Soient $F_1, \dots, F_q, G$ des espaces vectoriels réels de dimension finie. Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$ soit $f_k : U \to F_k$ une fonction et $M : F_1 \times \cdots \times F_q \to G$ une application multilinéaire. On définit :

$$M(f_1, \dots, f_q)(x) = M(f_1(x), \dots, f_q(x)).$$

Proposition 22

- Si $f_1, \dots, f_q$ sont différentiables en a, alors l'application $g = M(f_1, \dots, f_q)$ est différentiable en a et pour tout $h \in E$:

$$dg(a) \cdot h = \sum_{k=1}^{q} M\Big(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), \underbrace{df_k(a) \cdot h}_{k\text{-ième place}}, f_{k+1}(a), \dots, f_q(a)\Big).$$

- Si $f_1, \dots, f_q$ sont différentiables (respectivement de classe C^1), alors $M(f_1, \dots, f_q)$ est différentiable (respectivement de classe C^1).

Exercice 23: Soient $f_1, \dots, f_q$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{M}_q(\mathbb{K})$. Montrer que le produit $f_1 \cdots f_q$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et que, pour tout a :

$$\mathrm{d}(f_1 \cdots f_q)(a) = \sum_{k=1}^{q} f_1(a) \cdots f_{k-1}(a)\, \mathrm{d}f_k(a) f_{k+1}(a) \cdots f_q(a)\,.$$

Exercice 24: Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application produit scalaire

$$\Phi : E^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle.$$

Proposition 25

Les applications polynomiales sur E sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 26

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dim finies, $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts, et deux applications

$$f : U \subset E \to F, \qquad g : V \subset F \to G$$

vérifiant $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to G$ est différentiable en a et on a :

$$dg \circ f(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Si f est différentiable (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) et g différentiable (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$), alors $g \circ f$ est différentiable (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 27: On suppose que F est un espace euclidien.
On considère la fonction

$$\psi : F \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \psi(x) = \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

1. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $F \setminus \{0\}$.
2. Calculer la différentielle $d\psi(x)$ en un point $x \in F \setminus \{0\}$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction ne s'annulant pas, différentiable en $a \in U$.

1. Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est différentiable en a.
2. Calculer la différentielle de g en a et vérifier que

$$\mathrm{d}g(a) = -\frac{\mathrm{d}f(a)}{f(a)^2},$$

Proposition 28

Toute fonction rationnelle définie sur U, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 29: On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Inv}: & GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & M^{-1}. \end{array}$$

Grâce à la formule classique $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \mathrm{Com}(M)^T$, on voit que les composantes de Inv sont des fonctions rationnelles, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, l'application $M \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Opérations sur les fonctions differentiables

Soit U' un ouvert de F, ainsi que $f : U \subset E \to F$ et $g : U' \to G$ telles que $f(U) \subset U'$. On note :

- $(x_1, \ldots, x_p)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B}$, lorsqu'elles existent ;
- $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ et donc $\dfrac{\partial g}{\partial y_i}$ les dérivées partielles de g dans la base $\mathcal{B}'$, lorsqu'elles existent.

Proposition 30

On suppose f différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a)$. En notant $f_1, \ldots, f_n$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$, on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \, \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)).$$

Exercice 31: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On définit

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = f(x+y, xy).$$

Déterminer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, des formules explicites pour $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x+y, xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x+y, xy)$.

Proposition 32

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ et $g : V \to W \subset \mathbb{R}^p$ sont deux applications différentiables, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable et, pour tout $a \in U$, on a :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a).$$

Exercice 33: On pose

$$f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z) \quad \text{et} \quad g(u, v) = (u^2 + v,\ uv,\ e^v).$$

Justifier la différentiabilité de f et de g, calculer les différentielles de f, de g, de $g \circ f$ et de $f \circ g$ (pour ces deux dernières fonctions, on utilisera deux méthodes).

Gradient

Gradient

Soit E est un espace euclidien et $F = \mathbb{R}$. Rappelons que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $v \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad \varphi(h) = \langle v, h \rangle.$$

Donc si U ouvert de E et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \Omega$, alors il existe un unique $v \in E$ tel que :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = \langle v, h \rangle.$$

Définition 34

Soit U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in \Omega$. Le **gradient de f en** a, noté $\nabla f(a)$, est l'unique vecteur de E vérifiant :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Gradient

Proposition 35

On suppose E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si U ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors:

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a)\, e_j.$$

Proposition 36

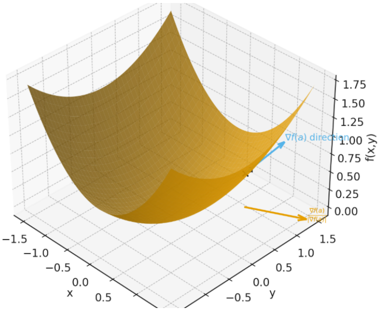
On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Si U ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $a \in U$, alors :

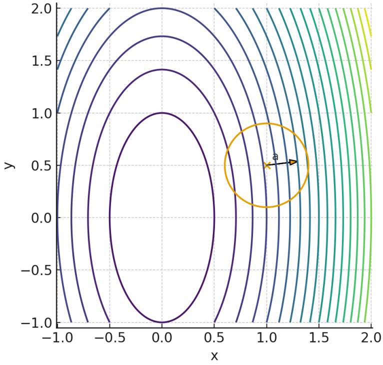
$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = (J_f)^T.$$

Gradient

Proposition 37

Soit U ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. La restriction à la sphère unité de la fonction $h \mapsto D_h f(a)$ admet un maximum qui est atteint, si $\nabla f(a) \neq 0$, en $\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$.





Hessienne / Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Hessienne

Définition 38

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in U$. La **matrice hessienne** de f en a, notée $H_f(a)$, est :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq p}.$$

Remarque: La matrice hessienne de f en a est symétrique.

Exercice 39: Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$f(x) = x^T A x.$$

Déterminer la matrice hessienne $H_f(x)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Définition 40

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in U$. On a alors au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Remarque: On peut aussi écrire le développement limité à l'ordre 2 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2} (H_f(a) h \mid h) + o(\|h\|^2).$$

Théorème de scwarz

Proposition 41 [Théorème de Schwarz]

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (i.e. les opérateurs ∂_i et ∂_j commutent).
- Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, pour toute permutation σ de $[\![1,k]\!]$ et pour tout $(i_1, ..., i_k) \in [\![1,n]\!]^k$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} .. \partial x_{i_k}} = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} .. \partial x_{i_{\sigma(k)}}}$