

# Fonctions dérivables au sens complexe

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing  
UM6P



# Limite et continuité

## Définition 1

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \bar{\Omega}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $z_0$  et on note

$$f(x) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \Omega, \quad |z - z_0| \leq \delta \implies |f(z) - \ell| \leq \varepsilon$$

## Définition 2

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ .

- Soit  $z_0 \in \Omega$ . On dit que  $f$  est continue en  $z_0$  si

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} f(z_0).$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $\Omega$  si elle est continue en chaque point de  $\Omega$ .

## Proposition 3

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $\Omega$ . Alors les fonctions  $f + g$ ,  $\lambda f$  et  $fg$  sont continues sur  $\Omega$ . En outre, si  $g$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ , alors le quotient  $f/g$  est continu sur  $\Omega$ .

## Proposition 4

Proposition 1.4. Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction continue de  $\Omega_1$  dans  $\Omega_2$  et  $g$  une fonction continue de  $\Omega_2$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors  $g \circ f$  est continue sur  $\Omega_1$ .

Exercice 5: Montrer que les fonctions

- ①  $z \mapsto z^2$ ,
- ②  $z \mapsto \bar{z}$ ,
- ③  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ ,
- ④  $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ ,
- ⑤  $z \mapsto |z|^2$ .

sont continues sur  $\mathbb{C}$ .

# Dérivabilité

## Définition 6

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . - Soit  $z_0 \in \Omega$ . On dit que la fonction  $f$  est dérivable (ou  $\mathbb{C}$ -dérivable) au point  $z_0$  si la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(bien définie sur  $\Omega \setminus \{z_0\}$ ) admet une limite en  $z_0$ . Dans ce cas cette limite est appelée dérivée de  $f$  au point  $z_0$  et est notée  $f'(z_0)$ .

- On dit que  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$  si elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$ . Dans ce cas la fonction

$$f' : \begin{cases} \Omega & \rightarrow & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{cases}$$

est appelée dérivée de  $f$ .

- On appelle fonction entière une fonction holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$ .
- On dit d'une fonction qu'elle est de classe  $C^1$  si elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable et si sa dérivée est continue. Par récurrence, on dit qu'une fonction est de classe  $C^k$  pour  $k \geq 2$  si elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable et si sa dérivée est de classe  $C^{k-1}$ . Une fonction de classe  $C^\infty$  est une fonction de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .



## Exemple:

- 1 Une fonction constante sur  $\Omega$  est dérivable de dérivée nulle.
- 2 La fonction  $z \mapsto z$  est dérivable sur  $\mathbb{C}$  de dérivée constante égale à 1.
- 3 Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors la fonction  $f : z \mapsto z^k$  est dérivable sur  $\mathbb{C}$  de dérivée  $f' : z \mapsto kz^{k-1}$ .

## Exercice 7:

- 1 Montrer que la fonction  $z \mapsto \bar{z}$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}$ .
- 2 Montrer que la fonction  $f : z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}^*$ , et qu'elle est dérivable en 0 de dérivée nulle.

## Proposition 8

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  et  $z_0 \in \Omega$ . Alors  $f$  est dérivable en  $z_0$  de dérivée  $f'(z_0)$  si et seulement si

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o_{z \rightarrow z_0}(|z - z_0|).$$

## Proposition 9

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- ① La fonction  $f + g$  est holomorphe de dérivée  $f' + g'$ .
- ② La fonction  $\lambda f$  est holomorphe de dérivée  $\lambda f'$ .
- ③ La fonction  $fg$  est holomorphe de dérivée  $f'g + fg'$ .
- ④ Si  $g$  ne s'annule pas, alors  $\frac{f}{g}$  est holomorphe de dérivée  $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

## Proposition 10

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$ . Soient  $f$  une fonction holomorphe de  $\Omega_1$  dans  $\Omega_2$  et  $g$  une fonction holomorphe de  $\Omega_2$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors la composée  $(g \circ f)$  est holomorphe sur  $\Omega_1$  de dérivée  $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$ .

## Définition 11

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . On appelle primitive de  $f$  une fonction  $F$  holomorphe sur  $\Omega$  telle que  $F' = f$ .

**Exemple:** Soit  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ . Alors la fonction  $z \mapsto z^m$  admet une primitive donnée par  $z \mapsto \frac{z^{m+1}}{m+1}$ .

# Formules de Cauchy-Riemann

# Formules de Cauchy-Riemann

$$\textcircled{1} \quad f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$\textcircled{2} \quad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Si  $f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$  est holomorphe, alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ce sont les formules de Cauchy-Riemann.

## Proposition 12

Soit  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ , avec  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si et seulement si  $\tilde{f} = P + iQ$  est différentiable en  $(x_0, y_0)$  avec

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Exercice 13: Montrer que les fonctions  $z \mapsto \bar{z}$ ,  $z \mapsto \Re z$ ,  $z \mapsto \Im z$  ne sont dérivables sur aucun point de  $\mathbb{C}$ .

# Connexité par arcs

## Définition 14

- 1 Soit  $E$  un espace metrique,  $A \subset E$  et  $a, b$  des éléments de  $A$ . On appelle chemin (continu) dans  $A$  d'extrémités  $a$  et  $b$  toute application continue  $f : [0, 1] \rightarrow A$  avec  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ .
- 2 Une partie  $A$  de  $E$  est dite connexe par arcs si, pour tous points  $a, b$  de  $A$ , il existe un chemin continu qui relie  $a$  et  $b$ .

## Proposition 15

Si  $(E, d)$  est un espace metrique, connexe par arcs, alors si,  $A$  est une partie à la fois ouverte et fermée de  $E$ ,  $A = \emptyset$  ou  $A = E$ .



# Séries entières et $\mathbb{C}$ dérivabilité.

## Définition 16

On appelle série (entière) dérivée d'une série entière  $\sum a_n z^n$  la série entière  $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ .

## Proposition 17

Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

## Proposition 18

En tout point  $z_0$  du disque de convergence, la fonction somme  $S$  de la série entière  $\sum a_n z^n$  est dérivable, et  $S'(z_0)$  est égal à la somme de la série de terme général  $(n+1)a_{n+1}z_0^n$ .

## Théorème 19

Si  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  alors sa somme  $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D(0, R)$  et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0, R), S^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n z^{n-p}.$$

ou encore  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0, R),$

$$S^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} z^n.$$

# Fonctions analytiques

## Définition 20

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  et  $z_0 \in \Omega$ . On dit que

- 1  $f$  est analytique en  $z_0$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset \Omega$  et une série entière  $\sum_n a_n z^n$  de rayon de convergence au moins égal à  $r$  telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r)$$

- 2  $f$  est analytique sur  $\Omega$  si  $f$  est analytique en chaque point de  $\Omega$ .

On note  $\mathcal{A}(\Omega)$  l'espace des fonctions analytiques sur  $\Omega$ .

## Théorème 21

Soit  $f(z) = \sum a_n z^n$  une série entière dont le rayon de convergence  $R > 0$ . Pour tout élément  $z_0 \in \mathcal{D}(0, R)$ , la série entière  $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) z^n$  a un rayon de convergence  $\geq R - |z_0|$  et on a :

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

Autrement dit, la somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence.

# Principe des zéros isolés & Principe du prolongement analytique

## Théorème 22

Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$ , et  $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ .  
Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1  $f$  est identiquement nulle dans  $\Omega$ .
- 2  $f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $z_0$ .
- 3 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f^{(n)}(z_0) = 0$ .

## Corollaire 23

Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{C}$  et  $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ . Si  $f$  et  $g$  coïncident au voisinage d'un point de  $\Omega$ , on a  $f = g$ .



## Définition 24

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On dit que:

- ①  $z$  est un point isolé de  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $D(z, r) \cap A = \{z\}$ ,
- ②  $z$  est un point d'accumulation de  $A$  si pour tout  $r > 0$ ,  $D(z, r) \setminus \{z\} \cap A \neq \emptyset$ .

## Remarques:

- ① Les points de  $A$  qui ne sont pas isolés sont des points d'accumulation.
- ② Un point isolé de  $A$  est dans  $A$  (ce qui n'est pas nécessairement le cas d'un point d'accumulation).
- ③  $z$  est un point d'accumulation de  $A$  signifie que  $z$  est limite d'une suite de points de  $A \setminus \{z\}$  (en particulier un point d'accumulation est dans  $A$ ).

# Principe des zéros isolés & Principe du prolongement analytique

## Théorème 25 (Principe des zéros isolés)

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique non identiquement nulle, alors les zéros de  $f$  (i.e. les points en lesquels  $f$  s'annule) sont isolés.

## Théorème 26 (Principe du prolongement analytique)

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $\mathbb{C}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques :  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , si  $f = g$  sur un sous-ensemble de  $\Omega$  ayant un point d'accumulation dans  $\Omega$  alors  $f = g$  sur  $\Omega$ .

# Principe des zéros isolés & Principe du prolongement analytique

- 1 Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe par arcs  $\Omega$  et  $z \in \Omega$ . Si  $f(z_n) = g(z_n)$  où  $z_n$  est une suite de points de  $\Omega \setminus \{z\}$  convergeant vers  $z \in \Omega$  alors  $f = g$  sur  $\Omega$ .
- 2 Si  $f$  et  $g$  sont analytiques sur le domaine  $\Omega$  et coïncident sur un segment  $[a, b]$  inclus dans  $\Omega$  avec  $a \neq b$  alors  $f = g$  sur  $\Omega$ ,
- 3 Si  $f$  et  $g$  sont entières i.e. analytiques sur  $\mathbb{C}$  et si  $f = g$  sur  $\mathbb{R}$  (ou sur  $i\mathbb{R}$  ou sur une droite, ou sur un segment ou un cercle ou une courbe continue non réduite à un point ou plus généralement sur un ensemble possédant un point d'accumulation) alors  $f = g$  sur  $\mathbb{C}$ .